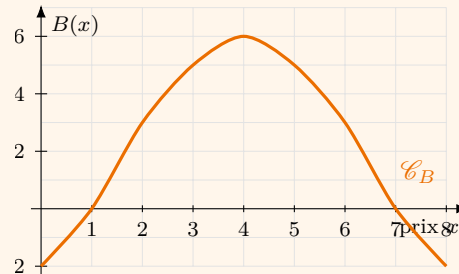


OBJECTIFS

- Modéliser une dépendance par une fonction.
- Passer d'une phrase à un tableau, une formule ou un graphique.
- Utiliser $y = f(x)$ et $x \mapsto f(x)$.
- Lire images et antécédents.
- Résoudre graphiquement une équation ou une inéquation.
- Lire signe, variations et extremums.

ACTIVITÉ DE DÉPART – PRIX ET BÉNÉFICE

Une entreprise teste différents prix de vente. Le graphique donne le bénéfice mensuel $B(x)$, en milliers d'euros, lorsque le prix est x euros.



1. Lire le bénéfice pour $x = 2$, puis pour $x = 6$.
2. Pour quels prix le bénéfice est-il nul ?
3. Pour quels prix est-il positif ?
4. Quel prix semble donner le bénéfice maximal ?

1. Une fonction traduit une dépendance

Définition (Fonction) Une fonction f associe à chaque nombre x d'un ensemble de départ un unique nombre, noté $f(x)$. On écrit

$$x \mapsto f(x) \quad \text{ou} \quad y = f(x).$$

La variable x est la variable d'entrée ; $f(x)$ est la valeur de sortie.

Exemple Le coût de production de x objets peut être modélisé par

$$C(x) = 4x + 120.$$

L'écriture $x \mapsto 4x + 120$ décrit la même fonction.

Méthode Dans un contexte, préciser :

- ce que représente x et son unité ;
- ce que représente $f(x)$ et son unité ;
- les valeurs possibles de x .

Propriété (Unicité de l'image) Pour une valeur donnée de x , une fonction ne peut fournir qu'une seule image $f(x)$. En revanche, une même valeur de sortie peut avoir plusieurs antécédents.

Vigilance. La fonction f n'est pas sa courbe $\mathcal{C}_f$. La courbe est une représentation graphique de la fonction.

2. Image, antécédent et ensemble de définition

Définition (Image et antécédent) Si $f(a) = b$, alors :

- b est l'**image** de a par f ;
- a est un **antécédent** de b par f .

Exemple Pour $C(x) = 4x + 120$,

$$C(25) = 4 \times 25 + 120 = 220.$$

Le coût de 25 objets est 220 euros. Le nombre 220 est l'image de 25.

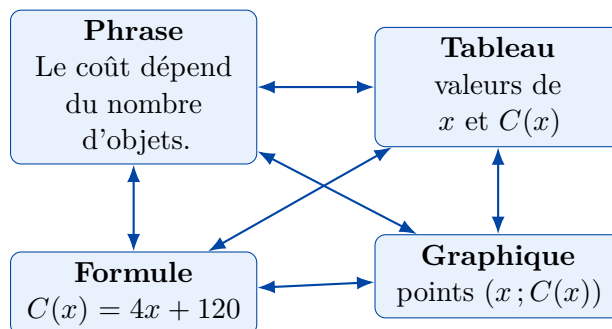
Définition (Ensemble de définition)

L'ensemble de définition de f , noté D_f , est l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles $f(x)$ existe dans le modèle étudié.

⇒ TD N04, partie A : exercices 1 à 7

3. Quatre registres pour décrire une fonction

Une même dépendance peut être présentée par une phrase, un tableau, une formule ou un graphique.



Méthode Pour passer d'une formule à un tableau, choisir des valeurs de x puis calculer $f(x)$. Pour placer le point correspondant dans un repère, utiliser les coordonnées $(x; f(x))$.

Exemple Pour $C(x) = 4x + 120$:

x	0	10	25	40
$C(x)$	120	160	220	280

Le point $A(25; 220)$ appartient à la courbe représentative de C .

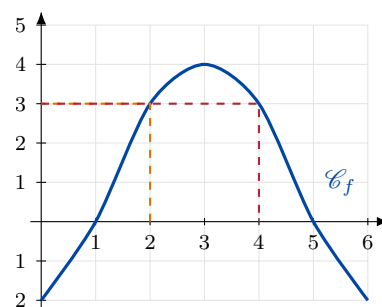
4. Lire images et antécédents sur une courbe

Méthode Lire l'image de a .

1. Partir de a sur l'axe horizontal.
2. Rejoindre verticalement la courbe.
3. Lire horizontalement l'ordonnée obtenue.

Lire les antécédents de b .

1. Partir de b sur l'axe vertical.
2. Tracer mentalement l'horizontale $y = b$.
3. Lire les abscisses des points d'intersection.



Exemple Sur ce graphique, $f(2) = 3$. Le nombre 3 possède deux antécédents : 2 et 4.

Vigilance. L'image se lit à partir d'une abscisse; un antécédent se lit à partir d'une ordonnée.

⇒ TD N04, partie B : exercices 8 à 17

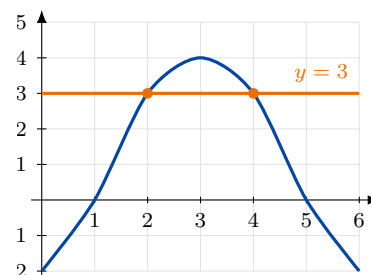
5. Résoudre graphiquement une équation ou une inéquation

Propriété (Intersections avec une droite horizontale) Les solutions de $f(x) = k$ sont les abscisses des points d'intersection entre $\mathcal{C}_f$ et la droite d'équation $y = k$.

Méthode Pour résoudre graphiquement :

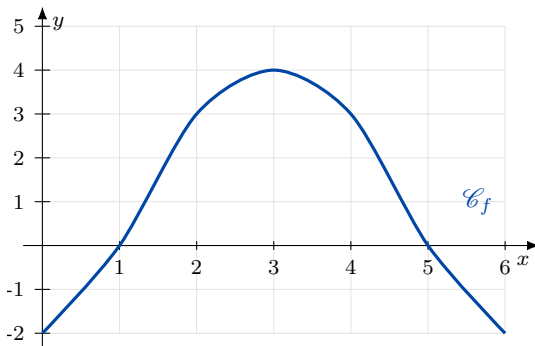
- $f(x) > k$: lire les abscisses où la courbe est au-dessus de $y = k$;
- $f(x) < k$: lire les abscisses où elle est en dessous ;
- avec $\geq$ ou $\leq$, inclure les points d'intersection.

Les valeurs lues sur un graphique sont souvent approchées.



Exemple Sur ce graphique, $f(x) = 3$ a pour solutions 2 et 4, et $f(x) \geq 3$ pour $x \in [2; 4]$.

6. Lire signe, variations et extremums



Propriété (Signe) La fonction est positive lorsque $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de l'axe des abscisses, nulle aux intersections avec cet axe, et négative en dessous.

Pour le graphique ci-contre :

$$\begin{aligned} f(x) &> 0 && \text{sur }]1; 5[, \\ f(x) &= 0 && \text{pour } x = 1 \text{ ou } x = 5, \\ f(x) &< 0 && \text{sur } [0; 1[\cup]5; 6]. \end{aligned}$$

Définition (Variations et extremums) En parcourant la courbe de gauche à droite, la fonction est **croissante** lorsque la courbe monte et **décroissante** lorsqu'elle descend. Une valeur la plus grande est un **maximum** ; une valeur la plus petite est un **minimum**.

Pour cette fonction, f est croissante sur $[0; 3]$, puis décroissante sur $[3; 6]$. Son maximum est 4, atteint pour $x = 3$, et son minimum est -2 , atteint pour $x = 0$ et $x = 6$.

Vigilance. Une fonction peut être positive et décroissante : le signe décrit sa position par rapport à l'axe horizontal, tandis que les variations décrivent le déplacement de la courbe.

8. Interpréter dans le contexte

Dans l'activité de départ, $B(x) = 0$ signifie que l'entreprise est à l'équilibre. La condition $B(x) > 0$ décrit les prix donnant un bénéfice. Le maximum fournit le prix qui semble le plus avantageux selon le modèle.

Méthode Après une lecture graphique, donner les valeurs éventuellement approchées, préciser l'unité, rédiger une phrase dans le contexte et vérifier le domaine du modèle.

⇒ TD N04, parties C et D : exercices 18 à 30

À RETENIR

- $f(a)$ est l'image de a ; a est un antécédent de $f(a)$.
- Le point $(x; f(x))$ appartient à la courbe $\mathcal{C}_f$.
- Résoudre $f(x) = k$ revient à chercher les intersections avec $y = k$.
- Le signe se lit par rapport à l'axe des abscisses.
- Les variations se lisent en parcourant la courbe de gauche à droite.
- Une lecture graphique doit être interprétée dans le contexte.

APPLICATIONS IMMÉDIATES

1. Pour $f(x) = 3x - 5$, calculer $f(4)$.
2. Traduire $g(6) = 12$ avec « image » et « antécédent ».
3. Sur une courbe, décrire la méthode pour résoudre $f(x) = 2$.
4. Expliquer comment lire le signe d'une fonction.
5. Distinguer « f est positive » et « f est croissante ».
6. Dans un contexte, interpréter un maximum.