

OBJECTIFS

- Développer et réduire une expression simple.
- Factoriser par un facteur commun.
- Résoudre une équation produit nul.
- Déterminer le signe de $ax + b$.
- Étudier le signe d'un produit de deux facteurs du premier degré.
- Interpréter des zéros et un signe dans un contexte.

ACTIVITÉ DE DÉPART – UNE OPÉRATION RENTABLE ?

Pour une campagne commerciale, le bénéfice, en centaines d'euros, est modélisé par

$$B(x) = (x - 20)(60 - x),$$

où x est le nombre de lots vendus, avec $0 \leq x \leq 80$.

1. Calculer $B(20)$, $B(60)$, $B(30)$ et $B(70)$.
2. Pour quelles valeurs obtenues l'entreprise gagne-t-elle de l'argent ?
3. Que représentent les nombres 20 et 60 ?
4. Sans développer, conjecturer les valeurs de x pour lesquelles $B(x) > 0$.

1. Transformer une expression

Définition (Développer et réduire) **Développer** consiste à transformer un produit en somme. **Réduire** consiste à regrouper les termes de même nature.

Propriété (Distributivité) Pour tous réels a, b, c ,

$$a(b + c) = ab + ac, \quad a(b - c) = ab - ac.$$

Définition (Factoriser) **Factoriser** consiste à transformer une somme en produit.

Propriété (Facteur commun) Pour tous réels a, b, c ,

$$ab + ac = a(b + c), \quad ab - ac = a(b - c).$$

Exemple

$$5x(x - 2) + 3(x - 2) = (x - 2)(5x + 3).$$

Exemple

$$3(2x - 5) + 4x = 6x - 15 + 4x = 10x - 15.$$

Méthode Avant de calculer, observer la structure. Développer est utile pour comparer ou réduire ; factoriser est utile pour résoudre une équation produit nul ou étudier un signe.

Vigilance. Dans $3(2x - 5)$, le facteur 3 multiplie **chacun** des termes entre parenthèses.

⇒ TD N03, partie A : exercices 1 à 8

2. Résoudre une équation produit nul

Propriété (Produit nul) Un produit de nombres réels est nul si et seulement si au moins l'un de ses facteurs est nul :

$$A \times B = 0 \iff A = 0 \text{ ou } B = 0.$$

Méthode Pour résoudre une équation produit nul :

1. vérifier que le second membre est nul ;
2. annuler séparément chaque facteur ;
3. résoudre les équations obtenues ;
4. conclure par l'ensemble des solutions.

Exemple On résout dans $\mathbb{R}$ l'équation $(3x - 6)(x + 4) = 0$.

$$(3x - 6)(x + 4) = 0 \iff 3x - 6 = 0 \text{ ou } x + 4 = 0 \iff x = 2 \text{ ou } x = -4.$$

Ainsi, $\mathcal{S} = \{-4; 2\}$.

Vigilance. La propriété du produit nul ne s'applique pas à $(x - 2)(x + 3) = 5$. Il faut d'abord obtenir un second membre égal à 0, puis factoriser si cela est possible.

⇒ TD N03, partie B : exercices 9 à 16

3. Signe d'une expression du premier degré

Propriété (Signe de $ax + b$) Soit $a \neq 0$. L'expression $ax + b$ s'annule pour

$$x_0 = -\frac{b}{a}.$$

Elle a le signe de a à droite de x_0 , et le signe opposé à gauche.

Exemple Pour $3x - 6$, la valeur d'annulation est $x = 2$. Comme $3 > 0$,

Exemple Pour $-2x + 8$, la valeur d'annulation est $x = 4$. Comme $-2 < 0$,

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$3x - 6$	−	0	+

x	$-\infty$	4	$+\infty$
$-2x + 8$	+	0	−

Ainsi, $3x - 6 < 0$ pour $x < 2$, et $3x - 6 > 0$ pour $x > 2$.

Ainsi, $-2x + 8 > 0$ pour $x < 4$, et $-2x + 8 < 0$ pour $x > 4$.

Méthode Pour résoudre $ax + b \geq 0$, on peut construire le tableau de signes de $ax + b$, puis lire les intervalles où la ligne est positive ou nulle.

4. Signe d'un produit factorisé

Propriété (Signe d'un produit) Le produit de deux facteurs de même signe est positif; le produit de deux facteurs de signes contraires est négatif.

Méthode Pour étudier le signe de $(ax + b)(cx + d)$:

1. calculer les zéros de chaque facteur ;
2. les ranger dans l'ordre croissant ;
3. construire une ligne de signe pour chaque facteur ;
4. multiplier les signes colonne par colonne.

Exemple Étudions le signe de $P(x) = (x - 2)(5 - x)$.

x	$-\infty$	2	5	$+\infty$
$x - 2$	−	0	+	+
$5 - x$	+	+	0	−
$P(x)$	−	0	+	−

Donc $P(x) > 0$ pour $x \in]2; 5[$, et $P(x) = 0$ pour $x = 2$ ou $x = 5$.

Vigilance. Dans un tableau de signes, les zéros appartiennent aux solutions de $P(x) \geq 0$, mais pas à celles de $P(x) > 0$.

⇒ TD N03, partie C : exercices 17 à 25

5. Interpréter un signe dans un contexte

Reprenons $B(x) = (x - 20)(60 - x)$, avec $0 \leq x \leq 80$.

x	0	20	60	80
$x - 20$	−	0	+	+
$60 - x$	+	+	0	−
$B(x)$	−	0	+	−

- $B(x) = 0$ pour $x = 20$ ou $x = 60$: l'opération est à l'équilibre.
- $B(x) > 0$ pour $20 < x < 60$: l'entreprise réalise un bénéfice.
- $B(x) < 0$ pour $0 \leq x < 20$ ou $60 < x \leq 80$: l'entreprise subit une perte.

À RETENIR

- Développer : transformer un produit en somme ; factoriser : transformer une somme en produit.
- $AB = 0$ si et seulement si $A = 0$ ou $B = 0$.
- $ax + b$ change de signe en $-\frac{b}{a}$.
- Pour un produit factorisé, étudier le signe de chaque facteur puis multiplier les signes.
- Une résolution d'équation se rédige par équivalences et se conclut par $\mathcal{S}$.

APPLICATIONS IMMÉDIATES

- Développer et réduire $4(2x - 3) - 5x$.
- Factoriser $7x(x + 1) - 3(x + 1)$.
- Résoudre $(2x + 6)(x - 5) = 0$.
- Étudier le signe de $4x - 12$.
- Résoudre $(x + 1)(3 - x) \geq 0$.
- Interpréter les zéros d'un bénéfice modélisé par $(x - 10)(50 - x)$.

⇒ TD N03, partie D : exercices 26 à 30