

Compléter une loi de probabilité et calculer une espérance simple.

- 1 Une variable X prend les valeurs 0, 10, 20 avec probabilités 0,2, 0,5, 0,3. Vérifier que c'est une loi.
- 2 Calculer $P(X \geq 10)$.
- 3 Calculer $P(X = 0)$.
- 4 Calculer l'espérance $E(X)$.
- 5 Un jeu coûte 8 euros et le gain moyen brut vaut 11 euros. Quel est le gain moyen net ?
- 6 Dire en une phrase ce que signifie $E(X) = 11$ dans ce contexte.

CONSEILS

- ▶ Une loi a des probabilités positives.
- ▶ La somme des probabilités vaut 1.
- ▶ Espérance : moyenne attendue sur beaucoup d'essais.

VIGILANCE

- ▶ Ne pas confondre la valeur prise par X et sa probabilité.

Correction rapide : on additionne les probabilités puis on pondère les valeurs.

- 1 $0,2 + 0,5 + 0,3 = 1$, donc c'est une loi : **oui**.
- 2 $P(X \geq 10) = 0,5 + 0,3 = \mathbf{0,8}$.
- 3 $P(X = 0) = \mathbf{0,2}$.
- 4 $E(X) = 0 \times 0,2 + 10 \times 0,5 + 20 \times 0,3 = \mathbf{11}$.
- 5 Gain net moyen : $11 - 8 = \mathbf{3}$ euros.
- 6 Sur un grand nombre de jeux, le gain brut moyen est d'environ **11 euros par jeu**.

MÉTHODE

- On calcule une moyenne pondérée.
- Chaque valeur est multipliée par sa probabilité.

VIGILANCE

- L'espérance n'est pas forcément une valeur réellement obtenue à chaque essai.

Reconnaître une loi de Bernoulli et lire son paramètre.

- 1 Un client achète ou n'achète pas un produit. Peut-on modéliser par une Bernoulli ?
- 2 Si $p = 0,7$, donner $P(X = 1)$.
- 3 Si $p = 0,7$, donner $P(X = 0)$.
- 4 Pour une Bernoulli de paramètre p , donner $E(X)$.
- 5 Dans $X = 1$ si succès, $X = 0$ sinon, que représente $1 - X$?
- 6 Sur 100 essais avec $p = 0,7$, combien de succès attend-on en moyenne ?

CONSEILS

- Bernoulli : deux issues, succès ou échec.
- On code souvent succès par 1, échec par 0.
- L'espérance d'une Bernoulli est son paramètre.

VIGILANCE

- Le mot succès désigne l'événement étudié, pas forcément une réussite commerciale.

Correction : on identifie le codage 0/1.

- 1 Oui : deux issues possibles, donc modèle de Bernoulli possible.
- 2 $P(X = 1) = p =$ 0,7.
- 3 $P(X = 0) = 1 - p =$ 0,3.
- 4 $E(X) =$ p .
- 5 $1 - X$ vaut 1 en cas d'échec : il code l'échec.
- 6 $100 \times 0,7 =$ 70 succès en moyenne.

MÉTHODE

- Une Bernoulli se lit avec $X = 1$ ou $X = 0$.
- Sur n essais, le nombre moyen de succès vaut np .

VIGILANCE

- Ne pas écrire $P(X = 0) = p$: c'est $1 - p$.

Lire une simulation et interpréter une fréquence observée.

- 1 Une simulation de 200 clients donne 118 achats. Calculer la fréquence observée.
- 2 Comparer cette fréquence à $p = 0,6$.
- 3 La fréquence 0,59 appartient-elle à l'intervalle $[0,55; 0,65]$?
- 4 Dans un programme, que signifie l'instruction : `alea() < 0.6` ?
- 5 Un succès rapporte 4 euros et un échec coûte 1 euro. Avec $p = 0,6$, calculer le gain moyen.
- 6 Dire pourquoi deux simulations de même taille ne donnent pas toujours la même fréquence.

CONSEILS

- Fréquence observée : effectif / total.
- Une simulation donne une valeur observée, pas une certitude.
- Pour une moyenne de gains, pondérer par les probabilités.

VIGILANCE

- Ne pas conclure qu'un modèle est faux dès qu'une fréquence n'est pas exactement égale à p .

Correction : fréquence, comparaison et espérance de gain.

- 1 $\frac{118}{200} = 0,59$.
- 2 0,59 est proche de 0,6 : écart 0,01.
- 3 Oui, $0,55 \leq 0,59 \leq 0,65$: oui.
- 4 L'instruction teste si le tirage aléatoire est inférieur à 0,6 : succès avec probabilité 0,6.
- 5 $4 \times 0,6 + (-1) \times 0,4 = 2,4 - 0,4 = 2$ euros.
- 6 À cause de la fluctuation d'échantillonnage.

MÉTHODE

- La fréquence observée varie d'une simulation à l'autre.
- L'espérance décrit un comportement moyen.

VIGILANCE

- Une simulation ne remplace pas le calcul de probabilité, elle l'illustre.

QCM type épreuve anticipée : une seule réponse correcte, aucune justification.

- 1 Une loi donne $P(X = 1) = 0,25$, $P(X = 2) = 0,45$. Alors $P(X = 3) =$
A. 0,20 B. 0,30 C. 0,70 D. 1
- 2 Si X suit une Bernoulli de paramètre 0,4, alors $E(X) =$ A. 0,6 B. 0,4 C. 1 D. 4
- 3 Pour $X : 0, 5, 10$ avec probabilités 0,2, 0,6, 0,2, $E(X) =$ A. 4 B. 5 C. 6 D. 10
- 4 Dans 50 essais, 31 succès donnent la fréquence A. 0,31 B. 0,50 C. 0,62 D. 31
- 5 La loi de Bernoulli modélise une expérience à A. 1 issue B. 2 issues C. 3 issues D. n issues
- 6 Si un gain net moyen vaut $-0,50$ euro, le jeu est en moyenne A. favorable B. neutre C. défavorable D. impossible

CONSEILS

- ▶ Repérer d'abord la nature de la question.
- ▶ Pour une loi, la somme des probabilités vaut 1.
- ▶ Pour une espérance, faire une moyenne pondérée.

VIGILANCE

- ▶ Dans un QCM, éliminer les réponses incompatibles avec un ordre de grandeur.

Correction du QCM : réponse et méthode en une ligne.

- | | |
|---|---|
| 1 | Réponse B : $1 - 0,25 - 0,45 = 0,30$. |
| 2 | Réponse B : pour une Bernoulli, $E(X) = p$. |
| 3 | Réponse B : $0 \times 0,2 + 5 \times 0,6 + 10 \times 0,2 = 5$. |
| 4 | Réponse C : $\frac{31}{50} = 0,62$. |
| 5 | Réponse B : succès ou échec. |
| 6 | Réponse C : une espérance négative est défavorable au joueur. |

MÉTHODE

- QCM : aucun point n'est gagné par une réponse non contrôlée.
- Les calculs sont courts et doivent rester mentaux.

VIGILANCE

- Vérifier que la réponse choisie a la bonne nature : probabilité, valeur, fréquence ou phrase.