

Probabilité, variable aléatoire, loi

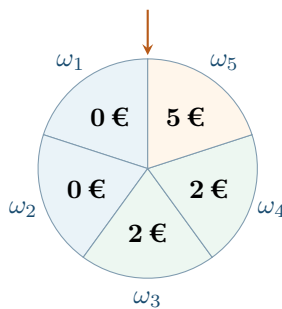
Partir d'une expérience pour comprendre les trois notions

Pourquoi introduire les variables aléatoires ?

« Quelle est la probabilité de gagner ? » et « Combien gagne-t-on en moyenne ? » sont deux questions différentes. Pour étudier une **quantité** et sa **dispersion**, on associe un nombre à chaque issue : c'est le rôle d'une variable aléatoire.

1. Une expérience concrète : tourner une roue

La roue possède **cinq secteurs de même taille**. Elle s'arrête sur chacun avec la probabilité $1/5$. Les secteurs sont nommés $\omega_1, \dots, \omega_5$; le nombre inscrit est le gain en euros, sans mise à payer.



Une **issue** est le secteur précis obtenu.

Un **événement** regroupe des issues :

« gagner 2 euros » correspond à $A = \{\omega_3, \omega_4\}$.

Sa probabilité est $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$.

L'**univers** est l'ensemble des issues : $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5\}$.

2. La variable aléatoire : quel nombre observe-t-on ?

On appelle X le **gain en euros**. La règle est fixée à l'avance :

$$X(\omega_1) = X(\omega_2) = 0, \quad X(\omega_3) = X(\omega_4) = 2, \quad X(\omega_5) = 5.$$

À retenir

Une variable aléatoire réelle est une **fonction qui associe un nombre à chaque issue**. Ici, $X(\omega_3) = 2$ se lit « si le secteur obtenu est ω_3 , le gain vaut 2 euros ». L'issue est aléatoire ; la règle qui lui associe un nombre est fixée.

3. La loi : quelles sont les chances de chaque gain ?

Les valeurs possibles de X sont 0 ; 2 et 5. Pour chaque valeur, on **regroupe les issues correspondantes** et on additionne leurs probabilités.

Valeur x	0	2	5	Total
Issues correspondantes	ω_1, ω_2	ω_3, ω_4	ω_5	–
$\mathbb{P}(X = x)$	$2/5$	$2/5$	$1/5$	1

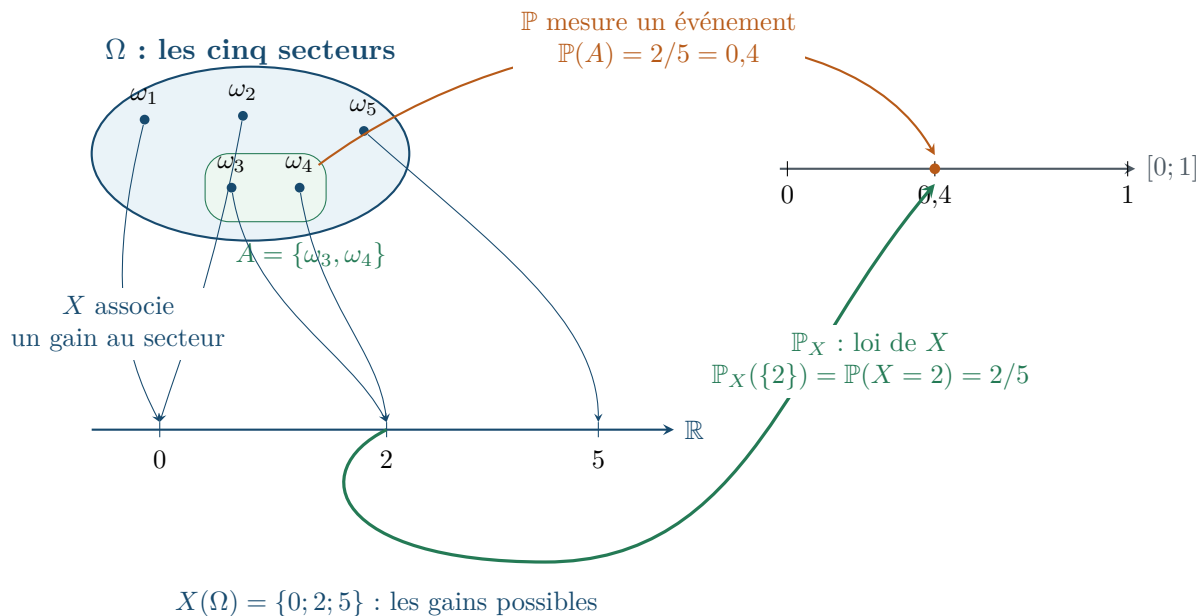
Ce tableau est la **loi de probabilité de X** : il donne toutes les valeurs possibles et la probabilité de chacune.

Point de vigilance

Les **cinq secteurs** sont équiprobables ; les **trois gains** ne le sont pas. On ne peut pas écrire $\mathbb{P}(X = 0) = 1/3$ au seul motif qu'il existe trois gains possibles.

4. Relier les trois notions : le schéma de synthèse

On reprend **la même roue**. Deux chemins permettent de calculer la même probabilité : partir de l'événement dans Ω , ou lire la loi de X .



Lire correctement $\mathbb{P}(X = 2)$

« $X = 2$ » est une **notation abrégée pour un événement** : l'ensemble des issues qui donnent le gain 2.

$$\{X = 2\} = \{\omega_3, \omega_4\}, \quad \mathbb{P}(X = 2) = \mathbb{P}(\{\omega_3\}) + \mathbb{P}(\{\omega_4\}) = \frac{2}{5}.$$

$\mathbb{P}_X(\{2\})$ est une autre écriture de cette même probabilité ; dans les calculs du TD, on utilisera surtout $\mathbb{P}(X = 2)$.

Un exemple de codage : pile ou face

On lance une pièce telle que $\mathbb{P}(\{\text{pile}\}) = 0,3$ et $\mathbb{P}(\{\text{face}\}) = 0,7$. On définit une autre variable Y par

$$Y(\text{pile}) = -\pi, \quad Y(\text{face}) = 2026.$$

Valeur y	$-\pi$	2026	Total
$\mathbb{P}(Y = y)$	0,3	0,7	1

Seule pile donne une valeur négative : $\{Y < 0\} = \{\text{pile}\}$, donc $\mathbb{P}(Y < 0) = 0,3$. Les deux valeurs sont inférieures à 3000 : $\mathbb{P}(Y < 3000) = 1$.

Les trois questions à distinguer

Probabilité $\mathbb{P}$: quelles sont les chances d'un événement ?

Variable X : quel nombre associe-t-on à chaque issue ?

Loi de X : quelles sont les valeurs possibles et leurs probabilités ?

5. Ce que l'on peut maintenant calculer

On revient au gain X de la roue : les valeurs 0 ; 2 ; 5 ont pour probabilités $2/5$; $2/5$; $1/5$.

L'espérance : une moyenne pondérée

On multiplie chaque valeur par sa probabilité, puis on additionne :

$$E(X) = 0 \times \frac{2}{5} + 2 \times \frac{2}{5} + 5 \times \frac{1}{5} = 1,8 \text{ €}.$$

Sur un grand nombre de tours indépendants, réalisés dans les mêmes conditions, le gain moyen par tour se rapproche de 1,80 euro. **Cela ne signifie pas que l'on gagne 1,80 euro à un tour** : ce gain ne figure même pas sur la roue.

La variance et l'écart-type : une mesure de la dispersion

La variance mesure la moyenne des **carrés des écarts à l'espérance**. Pour la calculer, on utilise souvent le second moment :

$$E(X^2) = 0^2 \times \frac{2}{5} + 2^2 \times \frac{2}{5} + 5^2 \times \frac{1}{5} = 6,6.$$

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 6,6 - 1,8^2 = 3,36 \text{ €}^2,$$

$$\sigma(X) = \sqrt{3,36} \approx 1,83 \text{ €}.$$

L'écart-type est exprimé dans la même unité que le gain. Une variable constante aurait une variance et un écart-type nuls.

Les formules à utiliser dans le cadre fini du TD4

Si X prend les valeurs distinctes $x_1, \dots, x_r$ de probabilités $p_1, \dots, p_r$:

$$p_i = \mathbb{P}(X = x_i) \geq 0, \quad \sum_{i=1}^r p_i = 1,$$

$$E(X) = \sum_{i=1}^r x_i p_i, \quad E(X^2) = \sum_{i=1}^r x_i^2 p_i, \quad \text{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2, \quad \sigma(X) = \sqrt{\text{Var}(X)}.$$

6. La fonction de répartition : cumuler les probabilités

Beaucoup de questions portent sur un **seuil** : « gagner au plus 2 euros », « gagner plus de 2 euros ». On additionne alors les probabilités de toutes les valeurs situées sous le seuil. La fonction de répartition donne directement ces sommes, pour **n'importe quel réel** x :

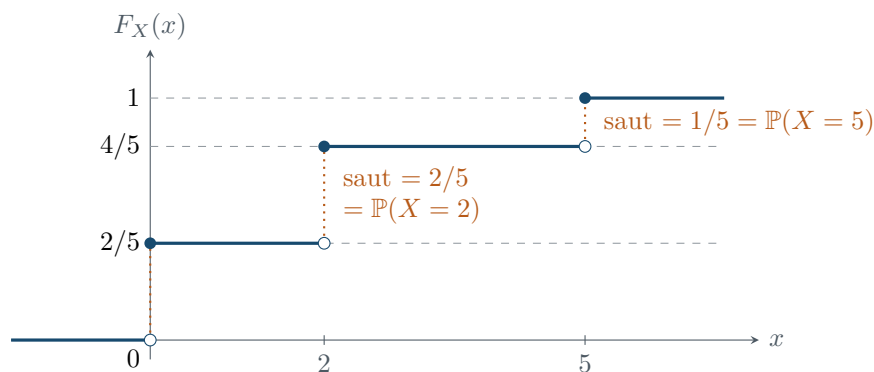
$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} \mathbb{P}(X = x_i).$$

Calcul sur la roue

On fait varier x de la gauche vers la droite ; la somme n'augmente que lorsque x atteint une valeur de X .

Intervalle	$x < 0$	$0 \leq x < 2$	$2 \leq x < 5$	$x \geq 5$
Valeurs de X inférieures ou égales à x	aucune	0	0 et 2	0 ; 2 et 5
$F_X(x)$	0	$2/5$	$2/5 + 2/5 = 4/5$	1

Par exemple, $F_X(3,7) = \mathbb{P}(X \leq 3,7) = \mathbb{P}(X = 0) + \mathbb{P}(X = 2) = 4/5$: 3,7 n'est pas un gain possible, mais $F_X(3,7)$ a un sens.



Lire le graphe d'une fonction de répartition discrète

- C'est une fonction **en escalier**, croissante, qui part de 0 (à gauche de toutes les valeurs) et arrive à 1 (à droite de toutes les valeurs).
- Elle ne « saute » qu'aux valeurs possibles de X ; **la hauteur du saut en x_i est $\mathbb{P}(X = x_i)$** . On retrouve donc le tableau de la loi en lisant les sauts.
- Au point de saut, la valeur retenue est celle du haut (point plein) : $F_X(2) = 4/5$, car l'événement $\{X \leq 2\}$ contient $\{X = 2\}$.

À quoi sert-elle ?

- **Calculer la probabilité d'un intervalle** par une simple différence :

$$\mathbb{P}(X > a) = 1 - F_X(a), \quad \mathbb{P}(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a).$$

Sur la roue : $\mathbb{P}(X > 2) = 1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$ et $\mathbb{P}(0 < X \leq 5) = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$.

- **Situer une valeur dans la distribution.** La médiane est la première valeur x pour laquelle $F_X(x) \geq \frac{1}{2}$: ici $F_X(0) = \frac{2}{5} < \frac{1}{2}$ et $F_X(2) = \frac{4}{5}$, donc la médiane du gain vaut 2 euros. C'est l'analogue théorique de la courbe des fréquences cumulées croissantes en statistique.
- **Décrire toutes les lois avec le même outil.** Pour une variable à densité (TD6), chaque valeur isolée a une probabilité nulle : le tableau de loi n'existe plus, mais F_X existe toujours et détermine la loi.

Inégalité large ou stricte

Pour une variable discrète, $\mathbb{P}(X < a)$ et $\mathbb{P}(X \leq a)$ diffèrent dès que a est une valeur de X :

$$\mathbb{P}(X < 2) = \mathbb{P}(X = 0) = \frac{2}{5}, \quad \text{alors que} \quad F_X(2) = \mathbb{P}(X \leq 2) = \frac{4}{5}.$$

Avant d'utiliser F_X , se demander si la valeur seuil est incluse ou non.

7. Une méthode pour les exercices

- 1. Décrire l'expérience et ses issues.** Justifier leurs probabilités ; ne pas supposer l'équiprobabilité sans raison.
- 2. Dire ce que compte ou mesure X .** Trouver toutes ses valeurs possibles.
- 3. Regrouper les issues qui donnent une même valeur.** Additionner leurs probabilités et remplir le tableau de loi.
- 4. Vérifier la loi.** Chaque probabilité est entre 0 et 1 ; leur somme vaut 1.
- 5. Calculer seulement ce qui est demandé.** Une probabilité d'événement, une probabilité cumulée (fonction de répartition), une espérance ou une mesure de dispersion.

8. Vérifier sa compréhension avant le TD4

Sur la roue, répondre avant de lire les réponses.

- a) Pourquoi y a-t-il cinq issues, mais seulement trois valeurs possibles pour X ?
- b) Calculer $\mathbb{P}(X \geq 2)$. Quelles issues correspondent à cet événement ?
- c) Un étudiant écrit $E(X) = (0 + 2 + 5)/3$. Quelle erreur commet-il ?
- d) On note $Z = 1$ si le gain est au moins 2 euros, et $Z = 0$ sinon. Donner sa loi.
- e) Calculer $F_X(1)$ et $F_X(2)$. Pourquoi ces deux nombres sont-ils différents ?

Réponses pour se vérifier

- a)** Plusieurs secteurs portent le même gain. **b)** $\mathbb{P}(X \geq 2) = 2/5 + 1/5 = 3/5$, avec $\omega_3, \omega_4, \omega_5$.
- c)** Les trois gains ne sont pas équiprobables : il faut pondérer les valeurs par $2/5$; $2/5$; $1/5$.
- d)** $\mathbb{P}(Z = 0) = 2/5$ et $\mathbb{P}(Z = 1) = 3/5$: la somme vaut 1.
- e)** $F_X(1) = \mathbb{P}(X \leq 1) = 2/5$ et $F_X(2) = \mathbb{P}(X \leq 2) = 4/5$: entre 1 et 2, on franchit la valeur 2, qui ajoute $\mathbb{P}(X = 2) = 2/5$.

Complément : écrire les définitions avec précision

On précise ici les définitions de probabilité, de variable aléatoire et de loi.

1. Univers, événements et probabilité dans le cas fini

L'univers Ω est l'ensemble des issues. Un événement est un sous-ensemble de Ω . La notation $\mathcal{P}(\Omega)$ désigne l'ensemble de tous ces sous-ensembles. Une probabilité est une application

$$\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \longrightarrow [0; 1]$$

qui vérifie $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ et l'additivité : pour des événements disjoints A et B ,

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B).$$

Dans un univers fini, on peut donc donner la probabilité de chaque issue, puis sommer :

$$p_\omega = \mathbb{P}(\{\omega\}) \geq 0, \quad \sum_{\omega \in \Omega} p_\omega = 1, \quad \mathbb{P}(A) = \sum_{\omega \in A} p_\omega.$$

L'équiprobabilité est un **cas particulier** : si toutes les issues ont la même probabilité,

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\text{nombre d'issues de } A}{\text{nombre total d'issues}}.$$

2. Variable aléatoire réelle

Dans ce cadre fini, une variable aléatoire réelle est une application

$$X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \omega \longmapsto X(\omega).$$

L'ensemble $X(\Omega)$ est l'ensemble de ses valeurs possibles. Si l'on pose $E = X(\Omega)$, on peut aussi écrire $X : \Omega \rightarrow E$. Pour une valeur x ,

$$\{X = x\} = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x\}.$$

C'est l'ensemble des issues qui vérifient l'équation $X(\omega) = x$, et non un nombre.

3. Loi de probabilité de X

La loi $\mathbb{P}_X$ est une probabilité sur l'ensemble E des valeurs de X :

$$\mathbb{P}_X : \mathcal{P}(E) \longrightarrow [0; 1], \quad \mathbb{P}_X(C) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in C\}), \quad C \subseteq E.$$

En particulier,

$$\mathbb{P}_X(\{x\}) = \mathbb{P}(X = x) = \sum_{\substack{\omega \in \Omega \\ X(\omega) = x}} \mathbb{P}(\{\omega\}).$$

Ainsi, le tableau des valeurs x et des masses $\mathbb{P}(X = x)$ détermine entièrement la loi dans le cas fini.

La **fonction de répartition** de X est l'application

$$F_X : \mathbb{R} \longrightarrow [0; 1], \quad F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq x\}).$$

Elle est croissante, continue à droite, tend vers 0 en $-\infty$ et vers 1 en $+\infty$. Dans le cas fini, elle est constante entre deux valeurs consécutives de X et son saut en x_i vaut $\mathbb{P}(X = x_i)$: elle contient donc la même information que le tableau de loi.

4. Ce qui s'ajoute dans un cadre plus général

Pour un univers dénombrable, l'additivité s'étend aux réunions dénombrables d'événements deux à deux disjoints. Sur un espace probabilisé général $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, seuls les ensembles de $\mathcal{A}$ sont des événements ; on demande alors que X soit **mesurable** :

$$\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in B\} \in \mathcal{A} \quad \text{pour tout borélien } B \subseteq \mathbb{R}.$$

Les boréliens sont les ensembles obtenus à partir des intervalles par réunions et intersections dénombrables et passage au complémentaire ; ils comprennent notamment tous les intervalles. Dans ce cadre, la loi est définie sur les boréliens de $\mathbb{R}$. Elle est entièrement déterminée par la fonction de répartition F_X : deux variables qui ont la même fonction de répartition ont la même loi, qu'elles soient discrètes ou à densité.

Pour la suite du cours

Une variable peut être discrète sans que l'univers soit fini. Pour une variable à densité, chaque valeur isolée a une probabilité nulle ; on calcule des probabilités d'intervalles. Sur un support infini, l'existence des moments doit être vérifiée. Le cadre fini étudié ici évite ces difficultés.