

Reconnaître les lois discrètes

Un préliminaire pour aborder le TD5

Le but : reconnaître la situation avant de choisir une formule

Au TD4, nous avons construit une loi en regroupant des issues. Certaines expériences reviennent souvent : leurs lois portent un nom. Les reconnaître donne directement une formule pour les probabilités, l'espérance et la variance.

1. Qu'observe-t-on ?

La question posée	Le modèle à examiner
Toutes les valeurs ont-elles la même probabilité ?	Uniforme discrète
Un seul essai : succès ou échec ?	Bernoulli
Combien de succès sur un nombre fixé d'essais ?	Binomiale si les essais sont indépendants et de même probabilité de succès
Combien d'objets d'une catégorie dans un prélèvement sans remise ?	Hypergéométrique
À quel essai arrive le premier succès ?	Géométrique si les essais sont indépendants, avec une probabilité de succès constante
Combien d'événements sur une durée fixée ?	Poisson si ce modèle est donné ou justifié

Deux points de départ simples

Uniforme discrète. On tire au hasard un jeton numéroté de 1 à 6, tous équiprobables. Son numéro U vérifie

$$\mathbb{P}(U = k) = \frac{1}{6} \quad (k = 1, \dots, 6).$$

Sur $\{1; \dots; m\}$, les formules sont $E(U) = (m + 1)/2$ et $\text{Var}(U) = (m^2 - 1)/12$. Ici, $E(U) = 3,5$ et $\text{Var}(U) = 35/12$.

Bernoulli. Une indicatrice I vaut 1 en cas de succès et 0 en cas d'échec. Si le succès a pour probabilité p :

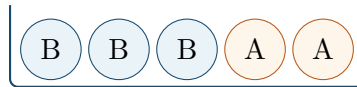
i	0	1	Total
$\mathbb{P}(I = i)$	$1 - p$	p	1

Alors $E(I) = p$ et $\text{Var}(I) = p(1 - p)$. Le mot *succès* désigne simplement la catégorie que l'on décide de compter.

Ce que l'on réutilise des TD précédents

Loi, espérance et variance : voir le préliminaire du TD4. Combinaisons : voir TD2, exercice 3. Probabilités conditionnelles et totales : voir TD3, exercices 1 et 4. Nous les utiliserons avec des exemples simples.

2. Binomiale : compter les succès



Une urne contient **trois boules bleues B** et **deux autres A**. On effectue **trois tirages avec remise**, en mélangeant à nouveau après chaque tirage. Les tirages sont modélisés comme indépendants. On note X le **nombre de boules bleues obtenues**.

Trois questions pour reconnaître le modèle

Le nombre d'essais est-il fixé ? **Oui : $n = 3$.**

Chaque essai est-il un succès ou un échec ? **Oui : B ou A.**

Les essais sont-ils indépendants avec le même p ? **Oui : $p = 3/5 = 0,6$.**

Donc $X \sim \mathcal{B}(3; 0,6)$. Le symbole $\sim$ se lit « suit la loi ».

Pourquoi un coefficient binomial ?

Pour obtenir exactement deux bleues, les suites possibles sont

BBA, BAB, ABB.

Chacune a pour probabilité $0,6^2 \times 0,4$. Les événements étant disjoints,

$$\mathbb{P}(X = 2) = 3 \times 0,6^2 \times 0,4 = 0,432.$$

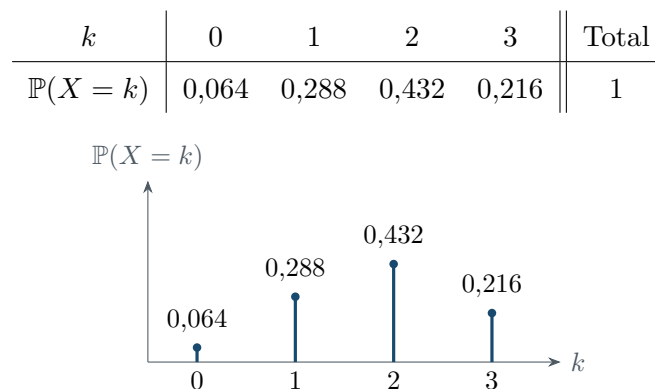
Le nombre $3 = \binom{3}{2}$ compte les choix des deux places occupées par B.

Loi binomiale : les formules

Pour n essais indépendants, de même probabilité de succès p ,

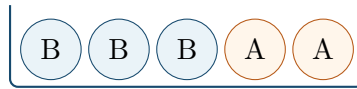
$$X \sim \mathcal{B}(n; p), \quad \mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, \dots, n.$$

$$E(X) = np, \quad \text{Var}(X) = np(1-p), \quad \sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}.$$



Ici, $E(X) = 1,8$, $\text{Var}(X) = 0,72$ et $\sigma(X) \approx 0,85$.

3. Hypergéométrique : prélever sans remise



On reprend **la même urne**, mais on tire cette fois **trois boules sans remise**. On note H le nombre de bleues. Chaque groupe de trois boules est supposé équiprobable.

La différence change le modèle

Après une première bleue, la probabilité d'une bleue au deuxième tirage est $2/4$; après une première autre boule, elle est $3/4$. Les tirages ne sont donc pas indépendants : les conditions de la loi binomiale ne sont pas réunies.

Compter les groupes de boules

Pour obtenir deux bleues et une autre boule :

$$\mathbb{P}(H = 2) = \frac{\overbrace{\binom{3}{2}}^{2 \text{ bleues parmi } 3} \overbrace{\binom{2}{1}}^{1 \text{ autre parmi } 2}}{\underbrace{\binom{5}{3}}_{3 \text{ boules parmi } 5}} = \frac{3 \times 2}{10} = 0,6.$$

On ne peut pas obtenir zéro bleue : il n'y a que deux autres boules et on en prélève trois. Les valeurs possibles sont donc 1, 2 et 3.

k	1	2	3	Total
$\mathbb{P}(H = k)$	0,3	0,6	0,1	1

Loi hypergéométrique : bien nommer les trois paramètres

Une population contient N objets, dont K dans la catégorie « succès ». On prélève n objets sans remise, tous les groupes étant équiprobables.

$$\mathbb{P}(H = k) = \frac{\binom{K}{k} \binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}}.$$

Il faut $0 \leq k \leq K$ et $0 \leq n - k \leq N - K$: on ne peut choisir plus d'objets d'une catégorie qu'il n'en existe.

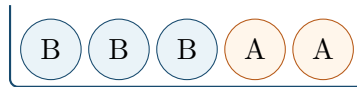
$$E(H) = n \frac{K}{N}, \quad \text{Var}(H) = n \frac{K}{N} \left(1 - \frac{K}{N}\right) \frac{N-n}{N-1} \quad (N > 1).$$

Ici, $N = 5$, $K = 3$, $n = 3$: $E(H) = 1,8$, $\text{Var}(H) = 0,36$ et $\sigma(H) = 0,6$.

Comparer pour comprendre

Les deux expériences ont la même espérance, mais pas la même loi ni la même variance. **Avec remise** : la composition reste identique. **Sans remise** : la composition change au fil des tirages.

4. Géométrie : attendre le premier succès

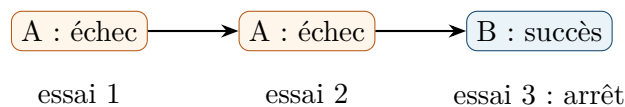


On remet la boule et on mélange après chaque tirage. Les essais sont indépendants, de probabilité de succès $p = 0,6$. On s'arrête à la **première bleue**. On note T le **nombre d'essais effectués, essai gagnant compris**.

Qu'est-ce qui change par rapport à la binomiale ?

Le nombre d'essais n'est plus fixé à l'avance. On peut réussir au premier essai, au deuxième, au troisième, etc. :

$$T \in \{1; 2; 3; \dots\}.$$



Réussir **pour la première fois au troisième essai** impose deux échecs puis un succès :

$$\mathbb{P}(T = 3) = 0,4^2 \times 0,6 = 0,096.$$

Loi géométrique : la convention commence à 1

Sur des essais indépendants, de même probabilité de succès $p > 0$, le rang T du premier succès suit $\mathcal{G}(p)$:

$$\mathbb{P}(T = k) = (1 - p)^{k-1}p, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

$$E(T) = \frac{1}{p}, \quad \text{Var}(T) = \frac{1-p}{p^2}, \quad \mathbb{P}(T > k) = (1 - p)^k \quad (k \in \mathbb{N}).$$

Dans $T > k$, les k premiers essais sont tous des échecs.

k	1	2	3	...	Total
$\mathbb{P}(T = k)$	0,6	0,24	0,096	...	1

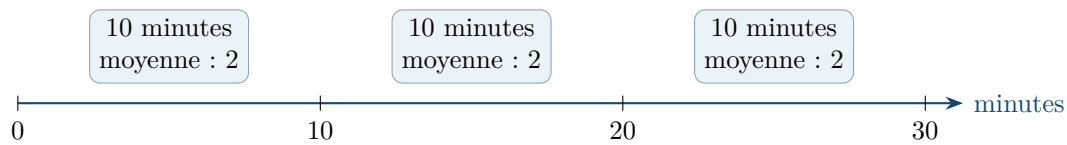
Le total 1 comprend **tous** les termes de la suite, pas seulement les trois affichés. Ici, $E(T) = 1/0,6 = 5/3 \approx 1,67$ essai : c'est une moyenne sur un grand nombre de répétitions indépendantes de l'expérience complète.

Point de vigilance

Compter les succès dans un nombre fixé d'essais : binomiale. Attendre le premier succès : géométrique. Si une mauvaise clé est définitivement écartée après un essai, la probabilité de réussite change : le modèle géométrique ne s'applique plus.

5. Poisson : compter sur une durée

Un service reçoit en moyenne **deux messages toutes les dix minutes**. On admet un **modèle de Poisson homogène** : le rythme moyen reste constant, et les comptes sur des intervalles disjoints sont indépendants. On note M le nombre de messages reçus en dix minutes.



Le paramètre est une moyenne, pas une probabilité

On écrit $M \sim \mathcal{P}(2)$. Le paramètre $\lambda = 2$ est le **nombre moyen de messages sur dix minutes**. Il peut dépasser 1. Le nombre effectivement reçu peut valoir $0, 1, 2, 3, \dots$; il n'est pas limité à 2.

Loi de Poisson

Si $M \sim \mathcal{P}(\lambda)$, avec $\lambda > 0$, alors

$$\mathbb{P}(M = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$k! = 1 \times 2 \times \dots \times k$ pour $k \geq 1$, et $0! = 1$.

$$E(M) = \lambda, \quad \text{Var}(M) = \lambda, \quad \sigma(M) = \sqrt{\lambda}.$$

Le symbole e est la constante exponentielle ($e \approx 2,718$). Le cas $\lambda = 0$ correspond à un compte toujours nul.

Deux calculs commentés

Exactement un message en dix minutes :

$$\mathbb{P}(M = 1) = e^{-2} \frac{2^1}{1!} = 2e^{-2} \approx 0,2707.$$

Au plus un message : zéro ou un, donc

$$\mathbb{P}(M \leq 1) = \mathbb{P}(M = 0) + \mathbb{P}(M = 1) = e^{-2} + 2e^{-2} \approx 0,4060.$$

Si l'on change la durée

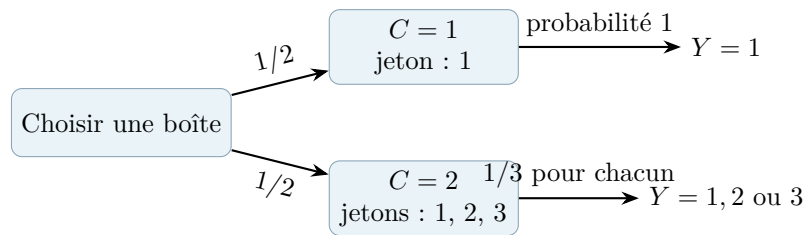
Sur trente minutes, la moyenne vaut $3 \times 2 = 6$. Le compte total suit alors $\mathcal{P}(6)$. La probabilité de n'avoir aucun message en trente minutes vaut $e^{-6} \approx 0,00248$.

Point de vigilance

Une moyenne seule ne suffit pas à prouver une loi de Poisson. Pour additionner les paramètres de comptes, il faut des comptes indépendants de Poisson. Dans le modèle homogène ci-dessus : $\lambda = \text{rythme moyen} \times \text{durée}$, avec des unités cohérentes.

6. Quand aucune loi usuelle ne suffit

Exemple en deux étapes. On choisit une boîte avec probabilité $1/2$ chacune, puis un jeton uniformément dans la boîte choisie. La boîte 1 contient un jeton numéroté 1 ; la boîte 2 contient trois jetons numérotés 1, 2, 3. On note C le numéro de la boîte et Y le numéro lu.



L'écriture $\mathbb{P}(Y = j \mid C = i)$ se lit « probabilité de lire j , sachant que la boîte choisie est i ». Une fois la boîte fixée :

	$Y = 1$	$Y = 2$	$Y = 3$	Total
$C = 1$	1	0	0	1
$C = 2$	$1/3$	$1/3$	$1/3$	1

Chaque ligne décrit une loi **conditionnelle**. Pour obtenir la loi de Y , on tient compte des deux chemins possibles :

$$\mathbb{P}(Y = 1) = \frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{3}, \quad \mathbb{P}(Y = 2) = \mathbb{P}(Y = 3) = \frac{1}{6}.$$

j	1	2	3	Total
$\mathbb{P}(Y = j)$	$2/3$	$1/6$	$1/6$	1

Probabilités totales : retrouver le TD3

Si les événements $\{C = i\}$ forment une partition et ont des probabilités non nulles,

$$\mathbb{P}(Y = j) = \sum_i \mathbb{P}(C = i) \mathbb{P}(Y = j \mid C = i).$$

On **multiplie le long d'un chemin**, puis on **additionne les chemins** donnant le numéro recherché.

Point de vigilance

Les boîtes sont équiprobables, mais les numéros lus ne le sont pas. On ne choisit pas une loi uniforme uniquement parce que l'énoncé contient « au hasard ».

7. Passer du texte au calcul

Une fois la loi reconnue, il faut encore traduire la question. Pour une variable X à valeurs entières :

Dans le texte	Événement et calcul
Exactement 2	$X = 2$: une seule probabilité
Moins de 2	$X < 2$, donc $X \leq 1$
Au plus 2	$X \leq 2$: sommer les probabilités jusqu'à 2
Plus de 2	$X > 2$, donc $X \geq 3$
Au moins un	$X \geq 1$: souvent $1 - \mathbb{P}(X = 0)$
Au moins 2	$X \geq 2$: souvent $1 - \mathbb{P}(X = 0) - \mathbb{P}(X = 1)$

Méthode en cinq étapes

1. **Définir la variable par une phrase.** Que compte-t-elle ?
2. **Justifier la loi par ses conditions**, pas seulement par son nom.
3. **Nommer les paramètres et les valeurs possibles.**
4. **Traduire la question**, puis appliquer la formule.
5. **Contrôler le résultat** : probabilité entre 0 et 1, somme 1 pour une loi complète, $\sigma = \sqrt{\text{Var}}$.

S'entraîner avant de lire les réponses

- a) Une urne contient 8 boules, dont 3 bleues. On en tire 4 avec remise, indépendamment. Quelle loi pour le nombre de bleues ?
- b) Même urne, 4 tirages sans remise : quelle loi et quelles valeurs possibles ?
- c) Même urne, tirages indépendants avec remise jusqu'à la première bleue : quelle loi ?
- d) Un compte suit une loi de Poisson de moyenne 3 par heure dans un modèle homogène. Quel paramètre sur 20 minutes ?
- e) Pour $X \sim \mathcal{B}(4; 3/8)$, écrire $\mathbb{P}(X \geq 1)$ sans sommer quatre termes.
- f) Choisir uniformément une boîte, puis un jeton, rend-il toujours les jetons de toutes les boîtes équiprobables ?

Réponses pour se vérifier

- a) $\mathcal{B}(4; 3/8)$. b) Hypergéométrique : $N = 8$, $K = 3$, $n = 4$; valeurs 0, 1, 2, 3.
 c) $\mathcal{G}(3/8)$ sur $\{1; 2; 3; \dots\}$. d) $\lambda = 3 \times (20/60) = 1$.
 e) $1 - (5/8)^4$. f) Non : un jeton d'une petite boîte peut être plus probable.

Où revenir pendant le TD5 ?

Exercice 1 : page 1 ; exercices 2 et 4 : page 2 ; exercice 3 : page 6 ; exercices 5 et 8 : page 3 ; exercice 6 : page 4 ; exercice 7 : page 5. Les règles de traduction de cette page servent dans toute la feuille.