

Ressource R1.05 : Probabilités 1

Travaux dirigés : séance 4

D'après un document de Chloé Friguet, Cédric Frambourg et Benjamin Dufée

Exercice 1 : Soit une variable aléatoire X dont la loi de probabilité est donnée par le tableau suivant :

x_i	-2	3	4	9
$\mathbb{P}(X = x_i)$	0,20	0,20	0,10	p

- 1) Déterminer p et représenter graphiquement la loi de probabilité.
- 2) Déterminer la fonction de répartition de la loi de X notée F_X et la représenter graphiquement.
- 3) Calculer :
 - a) $\mathbb{P}(X \leq 3)$
 - b) $\mathbb{P}(X < 3)$
 - c) $\mathbb{P}(X \leq 5)$
 - d) $\mathbb{P}(X < 5)$
 - e) $\mathbb{P}(X > 3)$
 - f) $\mathbb{P}(3 < X < 5)$
 - g) $\mathbb{P}(3 \leq X < 5)$

Exercice 2 : On considère un dé cubique, dont les faces sont numérotées de 1 à 6, truqué de telle sorte que la probabilité d'obtenir la face numérotée k est proportionnelle à k . Soit X la variable aléatoire associée au numéro de la face du dessus.

- 1) Quelle sont les différentes valeurs que peut prendre X ?
- 2) L'énoncé indique que $\mathbb{P}(X = k) = Ck$, où $C \in \mathbb{R}$ est une constante. Déterminer C .
- 3)
 - a) Représenter la loi de probabilité de X dans un tableau.
 - b) Calculer $\mathbb{E}(X)$.
- 4) On considère la variable aléatoire $Y = \frac{1}{X}$.
 - a) Représenter la loi de Y dans un tableau.
 - b) Calculer $\mathbb{E}(Y)$. Est-ce que l'on a $\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{\mathbb{E}(X)}$?

Exercice 3 : Un archer tire sur une cible contenant 5 régions de couleurs différentes. En partant du centre, on a respectivement :

- la zone jaune, qui représente 4% de la surface totale et valant 10 points.
- la zone rouge, qui représente 12% de la surface totale et valant 8 points.
- la zone bleue, qui représente 20% de la surface totale et valant 6 points.
- la zone noire, qui représente 28% de la surface totale et valant 4 points.
- la zone blanche, qui représente 36% de la surface totale et valant 2 points.

On supposera que l'archer atteint toujours la cible, et que tout point de la cible est équiprobable.

- 1) On considère X la variable aléatoire qui correspond au nombre de points gagnés pour un tir.
 - a) Représenter la loi de probabilité de X dans un tableau.
 - b) Calculer $\mathbb{E}(X)$.

- 2) Nouvelle règle : le joueur gagne les points s'il touche les zones jaune, rouge ou bleue et il les perd s'il touche les zones noire ou blanche. Le jeu est-il à l'avantage du joueur ?

Exercice 4 : Une entreprise souhaite recruter un nouveau salarié. Seulement 4 candidats se présentent pour le poste. Chacun d'entre eux passe à tour de rôle un test, et le premier qui réussit le test est engagé. On supposera que tous les candidats ont la même probabilité de réussir le test, qui est de 20%, et que les tests des différents candidats sont indépendants.

On notera, pour $i = 1, \dots, 4$, l'évènement A_i : "le candidat i réussit le test".

On définit la variable aléatoire X par $X = k$ si le k -ème candidat qui passe le test est engagé, et $X = 5$ si personne n'est engagé.

- 1) Déterminer la loi de X .
- 2) Calculer la probabilité que le poste soit pourvu.
- 3) Calculer l'espérance de X .

Exercice 5 : Soit X une variable aléatoire discrète dont la loi est donnée par le tableau suivant :

x_i	-2	-1	0	1	3
$\mathbb{P}(X = x_i)$	0,10	0,20	0,40	0,05	p_5

- 1) Calculer p_5 .
- 2) Calculer l'espérance mathématique $\mathbb{E}(X)$.
- 3) Calculer la variance $\text{Var}(X)$.

Exercice 6 : Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\{1; 2; 3; 4\}$ telle que :

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{k^2}{C}$$

- 1) Déterminer la constante de normalisation C .
- 2) Calculer l'espérance mathématique $\mathbb{E}(X)$.
- 3) Calculer l'écart-type $\sigma(X)$.

Exercice 7 : Une variable aléatoire Z peut prendre pour valeurs soit 0, soit 1 soit 2, avec des probabilités strictement positives. On sait que $\mathbb{E}(Z) = 1$ et que $\text{Var}(Z) = \frac{1}{2}$. Déterminer la loi de Z .

Exercice 8 : Une roulette contient 36 cases numérotées de 1 à 36 dont 18 sont rouges et 18 sont noires, plus une case numérotée 0 de couleur verte. Un joueur qui mise sur la couleur rouge ou noire gagne deux fois sa mise si la couleur choisie sort, il ne gagne rien sinon (dans tous les cas, il perd sa mise). Un joueur qui mise sur un numéro de 1 à 36 gagne 36 fois sa mise si le numéro sort, il ne gagne rien sinon (dans tous les cas, il perd sa mise). Il est interdit de miser sur le zéro.

- 1) Un joueur mise a euros sur une couleur. Soit C la variable aléatoire correspondant au gain associé.
 - a) Donner la loi de C .
 - b) Calculer $\mathbb{E}(C)$ et $\text{Var}(C)$.

- 2) Un joueur mise a euros sur un numéro. Soit N la variable aléatoire correspondant au gain associé.
- Donner la loi de N .
 - Calculer $\mathbb{E}(N)$ et $\text{Var}(N)$
- 3) Vaut-il mieux miser sur une couleur ou un numéro ?

Exercice 9 : On s'intéresse à une maladie génétique. Elle est portée par un gène particulier qui existe en deux formes : l'allèle A (sain), et l'allèle B (malade). Il existe donc par chaque individu trois génotypes possibles : 1 ($A A$), 2 ($A B$) et 3 ($B B$). Un individu est malade lorsqu'il porte le génotype ($B B$). On s'intéresse à une population donnée, dans laquelle la répartition des génotypes est la suivante :

- 75% de génotype 1,
- 20% de génotype 2,
- 5% de génotype 3.

Lors de la reproduction, chaque enfant reçoit un des deux allèles de chacun de ses parents (et ce de façon complètement aléatoire). On suppose aussi que les procréations dans la population se font complètement aléatoirement.

On notera E le génotype d'un enfant, et P et M les génotypes respectifs des deux parents.

- 1) Calculer, pour $i, j = 1, 2, 3$, les probabilités conditionnelles

$$\mathbb{P}(E = 1 \mid (P; M) = (i; j)).$$

- 2) En déduire $\mathbb{P}(E = 1)$.
- 3) On donne $\mathbb{P}(E = 2) = 0,255$ et $\mathbb{P}(E = 3) = 0,0225$.

Sachant que la manière dont s'héritent les gènes ne change pas, calculer comme précédemment la quantité $\mathbb{P}(EE = 1)$, où EE est le génotype des enfants issus de la génération des enfants E . Que remarquez-vous ?